860. Hilbert space ニ於ケル一定理ノ証明

中野 秀五郎（東大）

過日私ガ此誌上ニテ次ノ定理ヲ証明シタ。

定理. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ヲ closed linear manifold. $P_{\mathfrak{M}}$, $P_{\mathfrak{N}}$ ヲ夫々其ノ Projectionoperators トシ、$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ノ Durchschnitt $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ ノ Projectionoperator ヲ $P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}$ トスレバ

$$\lim_{n\to\infty} (P_{\mathfrak{M}}P_{\mathfrak{N}})^n = P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}}.$$

ナリ。

私ハ bounded Hermitean operator ノ spectralization ヲ利用シテ証明シタガ、角谷君ガ、其レニ對シ、Spectralization ヲ用ヒナイ別証明ヲ與ヘラレタ。此處ニ又新シイ別証明ヲ得タノデ書クコトヽスル。

証明ニハ次ノ補助定理ヲ使用スル。

補助定理. Hilbert space ノ elements $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ガ bounded ニシテ、然カモ總テノ m ニ對シ

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, f_m)$$

ガ存在スルナレバ、$f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ weakly ニ converge スル。

此ノ補助定理ハ次ノ如ク簡單ニ証明サレル。即チ先ヅ $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ニテ aufspannen サレタ closed linear manifold 内ノミニテ考ヘレバ, $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ此ノ manifold 内ノ überall dicht ナ element g ニ對シ, $\lim_{n\to\infty}(f_n, g)$ ガ存在シ、然カモ $f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ bounded Riesz ノ定理カラ此ノ manifold 内ニテ weakly ニ converge スルコトが證明出來ル。從ッテ一般ニ weakly ニ converge スル。

今 $H = P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}}$ トスレバ, 任意ノ element f ニ對シ, $\|Hf\| \leqq \|f\|$, 從ッテ $\|H^n f\| \leqq \|H^{n-1} f\|$、又

$$\lim_{n\to\infty}(H^{2n}f, H^{2m}f) = \lim_{n\to\infty}\|H^{m+n}f\|^2$$

ニテ limit ガ存在ス。故ニ上ノ補助定理ニヨリ $H^{2n}f$ ハ weakly ニ converge スル。其ノ weak limit ヲ f_0 トスレバ

$$(H^2 f_0, g) = (f_0, H^2 g) = \lim_{n\to\infty}(H^{2n}f, H^2 g)$$
$$= (f_0, g)$$

從ッテ

$$H^2 f_0 = f_0$$

故ニ

$$\|H^2 f_0\| = \|P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f_0\| \leqq \|P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f_0\|$$
$$\leqq \cdots\cdots \leqq \|f_0\|$$

ヨリ

$$P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f_0 = P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{N}} f_0 = \cdots\cdots = P_{\mathfrak{N}} f_0 = f_0$$

ヲ得ル。從ッテ $P_{\mathfrak{M}} f_0 = f_0$, $P_{\mathfrak{N}} f_0 = f_0$　故ニ $P_{\mathfrak{M}\mathfrak{N}} f_0 = f_0$ ナリ。

今 $P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}f=0$ ナル f ヲ考フレバ

$$(P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}f_0,\ g)=(f_0, P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}g)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(H^{2n}f, P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}g)=0$$

故ニ

$$f_0=P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}f_0=0$$

從ツテ

$$\lim_{n\to\infty}(H^{2n}f, f)=(0, f)=0$$

即チ

$$\lim_{n\to\infty}\|H^n f\|^2=0$$

故ニ $H^n f$ ハ strongly ニ 0 ニ converge スル。又 $P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}f=f$ ナル f ニ對シテハ、明カニ $H^n f$ ハ strongly ニ f ニ converge スル。故ニ任意ノ f ニ對シテハ

$$H^n f=H^n P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}f+H^n(1-P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}})f$$
$$\longrightarrow P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}f\ (\text{strongly})$$

ナリ。故ニ

$$\lim_{n\to\infty}(P_{\mathfrak{m}}P_{\mathfrak{n}})^n f=P_{\mathfrak{m}}\lim_{n\to\infty}H^{n-1}f=P_{\mathfrak{m}}P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}f$$
$$=P_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}f.$$

ヲ得ル。